

## ФОРМУЛА ПОЛНОЙ СТОИМОСТИ КРЕДИТА

**Романенко Р.В.**

**инженер АСУ,**

**РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина, факультет АиВТ**

### **Аннотация:**

С 1 сентября 2014 года в России действует новая формула полной стоимости кредита. Данная формула призвана показать, насколько реальный кредит (вместе с комиссиями и прочими платежами) отличается от обычного кредита (без комиссий и прочих платежей).

Формула должна обладать следующим качеством: полная стоимость кредита должна быть в точности равна номинальной ставке по договору, если нет комиссий и прочих платежей по актуарной схеме погашения. Однако существующая функция не удовлетворяет заявленным требованиям. В работе представлена функция, удовлетворяющая заявленным требованиям и ее расчет методом Ньютона

**Ключевые слова:** потребительское кредитование, эффективная процентная ставка, полная стоимость кредита.

## FULL VALUE OF THE LOAN FORMULA

**Romanenko R.V.**

**engineer,**

**National University of Oil & Gas "Gubkin University",**

**Faculty of Automation and Computer Engineering**

### **Abstract:**

Since 9/1/2014 Russia has a new formula for the total cost of a loan. This formula is intended to show how much a real loan (together with commissions and other payments) differs from a regular loan (without commissions and other payments)

The formula must have the following quality: the total cost of the loan must be exactly equal to the nominal rate under the contract, if there are no commissions and other payments under the actuarial repayment scheme. However, the existing function does not meet the stated requirements. The paper presents a function that meets the stated requirements and its calculation by Newton's method

**Key words:** consumer lending, full value of the loan, effective interest rate

Задача. Найти формулу полной стоимости кредита при актуарном способе погашения.

Решение. Актуарный способ погашения кредита строится по формулам:

i	Дата	Дата в годах	Денежный поток	Погашение процентов	Погашение основного долга	Остаток основного долга
0	$d_0$	$G_0=G(d_0)$	$R_0$			$K_0=-R_0$
...						
i	$d_i$	$G_i=G(d_i)$	$R_i$	$P_i=K_{i-1}r(G_i-G_{i-1})$	$H_i=R_i-P_i$	$K_i=K_{i-1}-H_i$
...						
n	$d_n$	$G_n=G(d_n)$	$R_n=P_n+H_n$	$P_n=K_{n-1}r(G_n-G_{n-1})$	$H_n=K_{n-1}$	$K_n=0$

Таблица 1. Актуарный способ погашения кредита.

Здесь:

$G_i=y_i+\Delta_i/D_i$ , где  $y_i$ -год даты  $d_i$ ,  $\Delta_i$  - порядковый номер дня в году  $d_i$ ,  $D_i$  - продолжительность календарного года даты  $d_i$ . Например,  $G(21 \text{ сентября } 2021)=2021 \frac{264}{365}$ .

$\Delta_i=d_i + [30.56m_i] - 30 - [0.1m_i + 0.7](367 - D_i)$

$d_i$  - день даты  $d_i$ , например, для даты 21 сентября 2021  $d_i=21$

например,  $\Delta_i(21.09.2021)=21+[30.56 \cdot 9]-30-[0.1 \cdot 9+0.7](367-365)=21+275-30-2=264$

$$D_i=365+\left[\frac{y_i}{4}\right]-\left[\frac{y_i-1}{4}\right]-\left(\left[\frac{y_i}{100}\right]-\left[\frac{y_i-1}{100}\right]\right)+\left(\left[\frac{y_i}{400}\right]-\left[\frac{y_i-1}{400}\right]\right)$$

например, для года 2021  $D_i=365+\left[\frac{2021}{4}\right]-\left[\frac{2020}{4}\right]-\left(\left[\frac{2021}{100}\right]-\left[\frac{2020}{100}\right]\right)+\left(\left[\frac{2021}{400}\right]-\left[\frac{2020}{400}\right]\right)=365$

$r$  - годовая процентная ставка, например,  $r=10\%=0,1$

Пусть  $n=4$ , тогда  $K_1=K_0-H_1=K_0-(R_1-K_0r(G_1-G_0))=K_0(1+r(G_1-G_0))-R_1$ .

$K_2=K_1-H_2=K_1-(R_2-K_1r(G_2-G_1))=K_1(1+r(G_2-G_1))-R_2=(K_0(1+r(G_1-G_0))-R_1)(1+r(G_2-G_1))-R_2=K_0(1+r(G_1-G_0))(1+r(G_2-G_1))-R_1(1+r(G_2-G_1))-R_2$ .

$K_3=K_2-H_3=K_2-(R_3-K_2r(G_3-G_2))=K_2(1+r(G_3-G_2))-R_3=(K_0(1+r(G_1-G_0))(1+r(G_2-G_1))-R_1(1+r(G_2-G_1))-R_2)(1+r(G_3-G_2))-R_3=K_0(1+r(G_1-G_0))(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))-R_1(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))-R_2(1+r(G_3-G_2))-R_3$

$K_4=K_3-H_4=K_3-(R_4-K_3r(G_4-G_3))=K_3(1+r(G_4-G_3))-R_4=(K_0(1+r(G_1-G_0))(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))-R_1(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))-R_2(1+r(G_3-G_2))-R_3)(1+r(G_4-G_3))-R_4=-R_0(1+r(G_1-G_0))(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))(1+r(G_4-G_3))-R_1(1+r(G_2-G_1))(1+r(G_3-G_2))(1+r(G_4-G_3))-R_2(1+r(G_3-G_2))(1+r(G_4-G_3))-R_3(1+r(G_4-G_3))-R_4=0$

Делаем предположение для доказательства методом математической индукции:

$$K_k = -R_k - \sum_{i=0}^{k-1} R_i \prod_{j=i+1}^k (1 + r(G_j - G_{j-1}))$$

1. Для  $k=1$

$$K_1 = -R_1 - \sum_{i=0}^0 R_i \prod_{j=1}^1 (1 + r(G_j - G_{j-1})) = K_0(1 + r(G_1 - G_0)) - R_1$$

2. Если верно для  $k$ , то верно для  $k+1$ :

$$K_{k+1} = \left( -R_k - \sum_{i=0}^{k-1} R_i \prod_{j=i+1}^k (1 + r(G_j - G_{j-1})) \right) (1 + r(G_{k+1} - G_k)) - R_{k+1}$$

$$K_{k+1} = -R_{k+1} - \sum_{i=0}^k R_i \prod_{j=i+1}^{k+1} (1 + r(G_j - G_{j-1}))$$

Итак, это утверждение:

$$K_n = -R_n - \sum_{i=0}^{n-1} R_i \prod_{j=i+1}^n (1 + r(G_j - G_{j-1}))$$

доказано для любого натурального  $n$

Отсюда, поскольку  $K_n = 0$  уравнение ПСК будет

$$-R_n - \sum_{i=0}^{n-1} R_i \prod_{j=i+1}^n (1 + r(G_j - G_{j-1})) = 0$$

Разделим обе части уравнения на  $-\prod_{j=1}^n (1 + r(G_j - G_{j-1}))$ :

$$R_0 + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\prod_{j=1}^i (1 + r(G_j - G_{j-1}))} = 0$$

Отсюда ПСК вычисляется из уравнения:

$$ДП_0 + \sum_{i=1}^n \frac{ДП_i}{\prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_j - G_{j-1})\right)} = 0$$

Ответ: ПСК находится из уравнения

$$ДП_0 + \sum_{i=1}^n \frac{ДП_i}{\prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_j - G_{j-1})\right)} = 0$$

Решение уравнения ПСК методом Ньютона:

Метод Ньютона основывается на следующей формуле:

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - \frac{f(x_{(k)})}{f'(x_{(k)})}$$

$$f(ПСК) = ДП_0 + \sum_{i=1}^n \frac{ДП_i}{\prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_j - G_{j-1})\right)}$$

значит,

$$f'(ПСК) = - \sum_{i=1}^n \frac{ДП_i \sum_{k=1}^i \frac{G_k - G_{k-1}}{1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_k - G_{k-1})}}{\prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_j - G_{j-1})\right)}$$

Пример:

Кредит выдан 01.09.2020 на сумму 1000000 рублей под 20% годовых на 1 год с ежеквартальным аннуитетным платежом. Рассчитать ПСК.

Дата	Дата в годах	Денежный поток	Погашение процентов	Погашение основного долга	Остаток основного долга
01.09.2020	20 245/366	-1000000			1000000
01.12.2020	20 56/61	281873,13	49726,78	232146,35	767853,65
01.03.2021	21 12/73	281873,13	37832,27	244040,86	523812,79
01.06.2021	21 152/365	281873,13	26405,91	255467,22	268345,57
01.09.2021	21 244/365	281873,13	13527,56	268345,57	0

Решение:

$$\begin{aligned}
 f(\text{ПСК}) &= -1000000 + \frac{281873,13}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(20 \frac{56}{61} - 20 \frac{245}{366}\right)} + \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(20 \frac{56}{61} - 20 \frac{245}{366}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{12}{73} - 20 \frac{56}{61}\right)\right)} \\
 &+ \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(20 \frac{56}{61} - 20 \frac{245}{366}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{12}{73} - 20 \frac{56}{61}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{152}{365} - 21 \frac{12}{73}\right)\right)} \\
 &+ \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(20 \frac{56}{61} - 20 \frac{245}{366}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{12}{73} - 20 \frac{56}{61}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{152}{365} - 21 \frac{12}{73}\right)\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \left(21 \frac{244}{365} - 21 \frac{152}{365}\right)\right)} \\
 &= -1000000 + \frac{281873,13}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}} + \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right)} + \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}\right)} \\
 &+ \frac{281873,13}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}\right)^2} \\
 f'(\text{ПСК}) &= -\frac{281873,13 \times \frac{91}{366}}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right)^2} - \frac{281873,13 \times \left(\frac{\frac{91}{366}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}} + \frac{\frac{1097}{4453}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}}\right)}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right)} - \frac{281873,13 \times \left(\frac{\frac{91}{366}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}} + \frac{\frac{1097}{4453}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}} + \frac{\frac{92}{365}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}}\right)}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}\right)} \\
 &- \frac{281873,13 \times \left(\frac{\frac{91}{366}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}} + \frac{\frac{1097}{4453}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}} + 2 \times \frac{\frac{92}{365}}{1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}}\right)}{\left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{91}{366}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{1097}{4453}\right) \left(1 + \frac{\text{ПСК}}{100\%} \times \frac{92}{365}\right)^2}
 \end{aligned}$$

1 итерация: положим ПСК<sub>(0)</sub>=0

$$f(0)=127492,52, f'(0)=-701794,253138557$$

$$\text{ПСК}_{(1)}=0\%-(127492,52/(-701794,253138557))*100\%=18,1666520393733\%$$

2 итерация:

$$f(18,1666520393733\%)=10695,3548405211,$$

$$f'(18,1666520393733\%)=-588426,954991432$$

$$\text{ПСК}_{(2)}=18,1666520393733\%-10695,3548405211/(-588426,954991432)*100\%=19,9842701395973\%$$

3 итерация:

$$f(19,9842701395973\%)=90,9947035668592,$$

$$f'(19,9842701395973\%)=-578451,944816156$$

$$\text{ПСК}_{(3)}=19,9842701395973\%-90,9947035668592/(-578451,944816156)*100\%=20,0000008678595\%$$

Уже на третьей итерации получаем ПСК=20,000%

Понятно, что вручную этот процесс очень утомителен, поэтому напишем программу на VBA

```
Function ДелитсяНа(ByVal y As Integer, ByVal m As Integer) As Integer
```

```
ДелитсяНа = Int(y / m) - Int((y - 1) / m)
```

```
End Function
```

```
Function ПродолжительностьГода(ByVal y As Integer) As Integer
```

```
ПродолжительностьГода = 365 + ДелитсяНа(y, 4) - ДелитсяНа(y, 100) + ДелитсяНа(y, 400)
```

End Function

Function ДатаВГодах(ByVal d As Date) As Double

y = Year(d)

t = ПродолжительностьГода(y)

m = Month(d)

ДатаВГодах = y - 2000 + (Day(d) + Int(30.56 \* m) - 30 - Int(0.1 \* m + 0.7) \* (367 - t)) / t

End Function

Function ПСК(Значения As Range, Даты As Range, Optional Предп As Double = 0) As Variant

'Функция воспринимает как даты, выраженные в годах,

'так и даты excel, причем даты, выраженные в годах от 2000 года до 2366

'года воспринимаются автоматически.

'Даты 1900-го года воспринимаются, как даты, выраженные в годах

If Значения.Count <>Даты.Count Then

ПСК = "#РАЗМЕРНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ И ДАТ НЕ СХОДЯТСЯ"

ElseIf Значения.Count = 1 Then

ПСК = "#НЕДОСТАТОЧНО ЗНАЧЕНИЙ"

Else

ПСК = Предп

ПСК0 = ПСК + 0.00001

j = 1

Dim ДатыВГодах() As Double

ReDim ДатыВГодах(Даты.Count)

If Даты(1) > 366 Then

For i = 1 To Даты.Count

ДатыВГодах(i) = ДатаВГодах(Даты(i))

Next

Else

For i = 1 To Даты.Count

```

ДатыВГодах(i) = Даты(i)
    Next
End If
While Abs(ПСК0 - ПСК) >= 0.0000000000000001 And j < 100
    f = Значения(1)
    diff = 0
    t = 1
    For i = 2 To Значения.Count
t = t * (1 + ПСК * (ДатыВГодах(i) - ДатыВГодах(i - 1)))
        f = f + Значения(i) / t
        df = 0
        For k = 2 To i
            df = df + (ДатыВГодах(k) - ДатыВГодах(k - 1)) / (1 + ПСК *
(ДатыВГодах(k) - ДатыВГодах(k - 1)))
        Next
        diff = diff - Значения(i) * df / t
    Next
ПСК0 = ПСК
ПСК = ПСК - f / diff
    j = j + 1
Wend
If j = 100 Then
ПСК = "#РЯД НЕ СХОДИТСЯ:" & ПСК & ";" & ПСК0
End If
End If
End Function

```

Ставка	20%	ПСК=	20,0000020286191%		
Дата	Дата в годах	Денежный поток	Погашение процентов	Погашение основного долга	Остаток основного долга
01.09.2020	20 245/366	-1000000			1000000
01.12.2020	20 56/61	281873,13	49726,78	232146,35	767853,65
01.03.2021	21 12/73	281873,13	37832,27	244040,86	523812,79
01.06.2021	21 152/365	281873,13	26405,91	255467,22	268345,57
01.09.2021	21 244/365	281873,13	13527,56	268345,57	0

Вот какой расчет выдает наша встроенная функция.

Даже абсолютно невысказанный кредит:

D1    =пск(С3:С7;А3:А7)						
	A	B	C	D	E	F
1	Ставка	20%	ПСК=	20,0000004979362%		
2	Дата	Дата в годах	Денежный поток	Погашение процентов	Погашение основного долга	Остаток основного долга
3	01.09.2020	20 245/366	-1000000			1000000
4	03.10.2020	20 277/366	30000	17486,34	12513,66	987486,34
5	06.12.2020	20 341/366	40000	34535,04	5464,96	982021,38
6	11.03.2021	21 14/73	80000	51082,17	28917,83	953103,55
7	11.01.2022	22 11/365	1112911,6	159808,05	953103,55	0

выдает ПСК = 20,0000%

Итог:

ПСК должна высчитываться по формуле:

$$ДП_0 + \sum_{i=1}^n \frac{ДП_i}{\prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{ПСК}{100\%} \times (G_j - G_{j-1})\right)} = 0,$$

где  $G_i = y_i + \Delta_i / D_i$ , где  $y_i$  - год даты  $d_i$ ,  $\Delta_i$  - порядковый номер дня в году  $d_i$ ,  $D_i$  - продолжительность календарного года даты  $d_i$ . Например,  $G(21 \text{ сентября } 2021) = 2021 \frac{264}{365}$ .

$$\Delta_i = d_i + [30.56m_i] - 30 - [0.1m_i + 0.7](367 - D_i)$$

$d_i$  - день даты  $d_i$ , например, для даты 21 сентября 2021  $d_i = 21$

например,

$$\Delta_i(21.09.2021) = 21 + [30.56 \cdot 9] - 30 - [0.1 \cdot 9 + 0.7](367 - 365) = 21 + 275 - 30 - 2 = 264$$

$$D_i = 365 + \left[ \frac{y_i}{4} \right] - \left[ \frac{y_i - 1}{4} \right] - \left( \left[ \frac{y_i}{100} \right] - \left[ \frac{y_i - 1}{100} \right] \right) + \left( \left[ \frac{y_i}{400} \right] - \left[ \frac{y_i - 1}{400} \right] \right)$$

например, для года 2021

$$D_i = 365 + \left[ \frac{2021}{4} \right] - \left[ \frac{2020}{4} \right] - \left( \left[ \frac{2021}{100} \right] - \left[ \frac{2020}{100} \right] \right) + \left( \left[ \frac{2021}{400} \right] - \left[ \frac{2020}{400} \right] \right) = 365$$

### Список литературы

[1] <https://ivo.garant.ru/#/document/70544866/paragraph/90/doclist/3094:0>

[2] <https://ru.wikipedia.org/wiki/Производная>

[3] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод\\_Ньютона](https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Ньютона)

[4] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Григорианский\\_календарь](https://ru.wikipedia.org/wiki/Григорианский_календарь)

[5] <https://ivo.garant.ru/#/document/70832382/paragraph/1:3>